

Licenciatura em Química
Cálculo I
Profª.: Rosana

Lista 2

1) Usando a definição de derivada, determine uma equação para a tangente à curva em um ponto dado. Em seguida, esboce a curva e a tangente em um único gráfico.
a) $y = 4 - x^2$, (1, 3)
b) $y = (x - 1)^2 + 1$, (1, 1)
c) $y = 1/x^2$, (-1, 1)

2) Determine o coeficiente angular do gráfico da função em um ponto dado. Em seguida, determine uma equação para a reta tangente ao gráfico naquele ponto.
a) $f(x) = x^2 + 1$, (2, 5)
b) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, (3, 3)
c) $g(x) = \sqrt{x}$, (4, 2)
d) $h(t) = t^3 + 3t$, (1, 4)

3) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta $2x - y - 1 = 0$.

4) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ que seja perpendiculares à reta $y + x = 0$.

5) Em que pontos os gráficos das funções f(x) e g(x) tem tangentes horizontais?
a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$
b) $g(x) = x^3 - 3x$

6) Sabendo que as curvas $y = 4x^2$ e $y = - x^{-1}$ tem retas tangentes paralelas com abscissa comum, determine-as.

7) **Objeto solto de cima de uma torre**.Um objeto foi derrubado do topo de uma torre de 100 m. Sua altura acima do solo após t segundos é de $100 - 4{,}9\,t^2$ m. Qual a velocidade da queda 2 segundos depois do objeto ter sido largado?

8) **Velocidade de um foguete.** Em t segundos após a decolagem, um foguete se encontra a uma altura de $3\,t^2$ pés. Qual a velocidade de subida do foguete 10 segundos após a decolagem?

9) **Variação do volume da bola.** Qual é a taxa de variação do volume de uma bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ em relação ao raio quando este for $r = 2$?

10) **Tangentes verticais.** Dizemos que uma curva contínua $y = f(x)$ tem uma tangente

vertical no ponto em que $x = x_0$ se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$ ou $-\infty$ .De acordo com o que foi dito, em que ponto os gráficos parecem ter tangentes verticais?

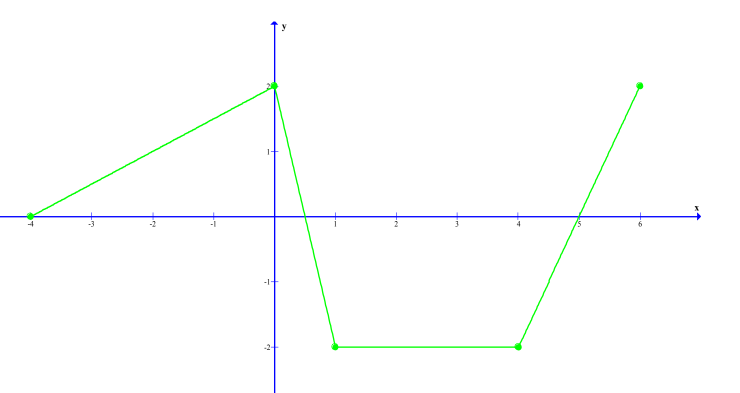
$a) y = x^{1/3}$

$b) y = x^{2/3}$

$c) y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

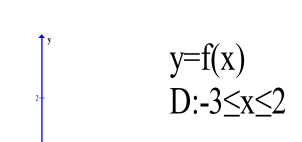
$d) y = 4x^{2/5} - 2x$

11) O gráfico da figura a seguir é composto por segmentos de reta unidos pelas extremidades.
a) Em quais pontos do intervalo [- 4, 6] a função f ' não é definida?
b) Desenhe o gráfico da derivada de f. O gráfico deve mostrar uma função escada.

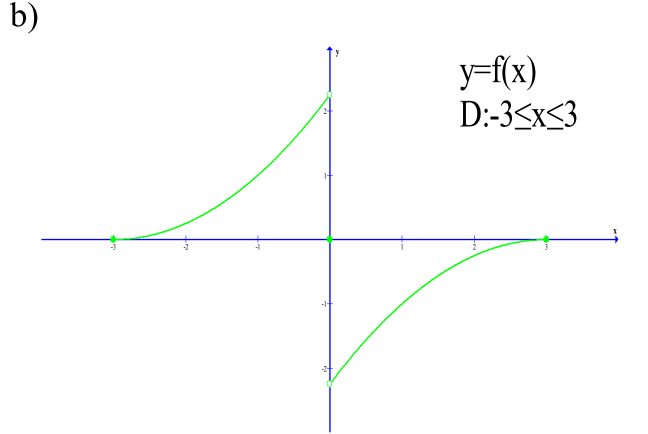


12) Cada figura mostra o gráfico de uma função em um intervalo fechado D. Em que pontos do domínio a função parece ser:
(i) Derivável? (ii) Contínua, mas não derivável? (iii) nem contínua, nem derivável?

a)



b)



13) Determine a primeira e a segunda derivadas.

$a) y = -x^2 + 3$

$b) y = x^2 + x + 8$

$c) s = 5t^3 - 3t^5$

$d) w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

$e) y = \frac{4}{3}x^3 - x + 2e^x$

$f) y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

$g) w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$

$h) s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

$i) y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

$j) r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$

14) Determine y' pela aplicação da regra do produto e pela multiplicação dos fatores para produzir uma soma de termos mais simples para derivar:

$a) y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

$b) y = (x^2 + 1)(x + 5 + \frac{1}{x})$

15) Determine as derivadas das funções:

$a) y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$

$b) y = \frac{4 - 3x}{3x^2 + x}$

$c) y = \frac{x^2 - 4}{x + 0,5}$

$d) y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

$e) y = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$

$f) y = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

$g) y = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

$h) y = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

$i) y = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$

$j) y = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

$k) y = 2e^{-x} + e^{3x}$

$l) y = \frac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$

$m) y = x^3 e^x$

$n) y = re^{-r}$

$o) y = x^{-3/5} + \pi^{3/2}$

$p) y = 2t^{3/2} + 3e^2$

$q) y = \sqrt[7]{x^2} - x^e$

$r) y = \frac{e^s}{s}$

16) Determine as derivadas de todas as ordens das funções:

$a) f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

$b) f(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 5)$

17) Suponha que u e v sejam funções de x deriváveis em x = 0 e que u(0) = 5, u'(0) = - 3, v(0) = - 1, v'(0) = 2. Determine os valores das derivadas a seguir em x = 0.

$a) \frac{d}{dx}(uv)$

$b) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

$c) \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$

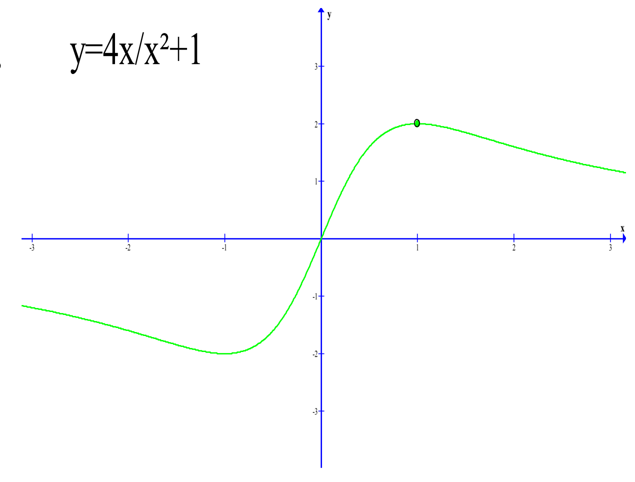
$d) \frac{d}{dx}(7v - 2u)$

18) **Normal a curva**. Determine uma equação para a reta perpendicular à tangente da curva $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto (2, 1).

19) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ que seja perpendiculares à reta y + x = 0.

20) **Tangentes horizontais.** Determine equações para as tangentes horizontais à curva $y = x^3 - 3x - 2$. Também determine equações para as retas que são perpendiculares a essas tangentes nos pontos de tangência.

21) **Serpentina de Newton.** Determine as tangentes para a serpentina de Newton (representada ao lado) na origem e no ponto (1,2).



22) **Esvaziamento de um tanque.** Depois de aberta a válvula na parte inferior de um tanque de armazenamento, são necessárias 12 horas até que seja esvaziado. A profundidade y do líquido no tanque, t horas depois de a válvula ter sido aberta é dada por

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 m$$

a) Determine a taxa dy/dt (m/h) do esvaziamento do tanque no instante t.
b) Quando o nível de líquido no tanque diminuirá mais rapidamente? Quais são os valores de dy/dt nesses instantes?
c) Faça um único gráfico para y e dy/dt e discuta o comportamento de y em relação aos sinais e aos valores de dy/dt.

23) Determine dy/dx.

$a) y = -10x + 3\cos x$

$b) y = \frac{3}{x} + 5senx$

$c) y = x^2 \cos x$

$d) y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

$e) y = senx.tgx$

$f) y = (\sec x + tgx)(\sec x - tgx)$

$g) y = \frac{\cos x}{1 + senx}$

$h) y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

$i) y = x^2 senx + 2x\cos x - 2senx$

$j) y = x^3 senx \cos x$

$k) y = \frac{senx}{1 - \cos x}$

$l) y = tgx - e^{-t}$

$m) y = \frac{xsenx}{x^2 - 1}$

24) Um peso está ligado a uma mola e atinge a sua posição de equilíbrio (x = 0). Em seguida, ele é posto em movimento, o que resulta em um deslocamento de x = 10 cos t, em que x é medido em centímetros e t é medido em segundos.
a) Determine o deslocamento da mola quando t = 0, t = $\pi/3$ e t = $3\pi/4$.
b) Determine a velocidade da mola quando t = 0, t = $\pi/3$ e t = $3\pi/4$.

25) Usando a regra da cadeia, determine dy/dx.

$a)\ y = (2x+1)^5$

$b)\ y = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-7}$

$c)\ y = \left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^4$

$d)\ y = \sec(tgx)$

$e)\ y = sen^3 x$

$f)\ y = e^{-5x}$

$g)\ y = e^{5-7x}$

$h)\ y = \sqrt{3-x}$

$i)\ y = \dfrac{4}{3\pi} sen 3x + \dfrac{4}{5\pi}\cos x$

$j)\ y = x^2 sen^4 x + x\cos^{-2} x$

$k)\ y = \dfrac{1}{21}(3x-2)^7 + \left(4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

$l)\ y = xe^{-x} + e^{3x}$

$m)\ y = (x^2 - 2x + 2)e^{5x/2}$

$n)\ y = (9x^2 - 6x + 2)e^{x^3}$

$o)\ y = sen^2(\pi x - 2)$

$p)\ y = (xtgx)^{10}$

$q)\ y = e^{\cos^2(\pi x - 1)}$

$r)\ y = \left(\dfrac{x^2}{x^3 - 4x}\right)^3$

$s)\ y = 3x(2x^2 - 5)^4$

26) Calcule a segunda derivada de $y = e^{x^2} + 5x$.

27) Se $y = xe^{2x}$, mostre que $y'' - 4y = 4e^{2x}$.

28) Para $y = \cos(\alpha x)$ e $y = sen(\alpha x)$, mostre que $y'' - \alpha^2 y = 0$.

29) Use a derivação implícita para determinar dy/dx:

$a)\ x^2 y + xy^2 = 6$

$b)\ 2xy + y^2 = x + y$

$c)\ x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

$d)\ y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

$e)\ x^4 + seny = x^3 y^2$

$f)\ e^{x^2 y} = 2x + 2y$

$g)\ x + tg(xy) = 0$

$h)\ ysen\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$

30) Determine as derivadas de y em relação a x ou t, conforme o caso:

$a)\ y = \ln 3x$

$b)\ y = \ln(t^2)$

$c)\ y = \ln\dfrac{3}{x}$

$d)\ y = \ln(2t+2)$

$e)\ y = \ln x^3$

$f)\ y = t(\ln t)^2$

$g)\ y = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16}$

$h)\ y = \ln\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$

$i)\ y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

$j)\ y = \ln(\ln x)$

31) Utilize a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável independente dada.

$a)\ y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

$b)\ y = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$

$c)\ y = t(t+1)(t+2)$

$d)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}}$

32) **Escada que escorrega.** Uma escada com 13 pés de comprimento está apoiada verticalmente em uma casa quando sua base começa a escorregar, afastando-se da parede. No momento em que a base está a 12 pés da casa, ela escorrega a uma taxa de 5 pés/s.
a) A que velocidade o topo da escada escorrega para baixo na parede?
b) Qual a taxa de variação da área do triângulo formado pela escada, parede e solo?
c) Qual a taxa de variação do ângulo θ , formado pela escada e pelo solo?

33) **Variação de Temperatura.** Foram necessário 14 s para que um termômetro de mercúrio subisse de -19°C para 100°C após ser retirado do congelador e colocado em água fervente. Demonstre que em algum ponto a coluna de mercúrio subia a uma taxa de 8,5°C/s.

34) Responda às perguntas seguintes sobre as funções cujas derivadas são dadas:
i) Quais são os pontos críticos de f ?
ii) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
iii) Em quais pontos, se houver, f assume valores máximos e mínimos locais?

$a) f'(x) = x(x-1)$

$b) f'(x) = (x-1)^2(x-2)$

$c) f'(x) = (x-1)e^{-x}$

$d) f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x+2}, \quad x \neq -2$

35) Determine os intervalos abertos que a função é crescente e aqueles em que ela é decrescente. Identifique os valores extremos absolutos e locais das funções, se houver, indicando onde ocorrem.

$a) f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$b) f(x) = x - 6\sqrt{x-1}$

$c) f(x) = x \ln x$

$d) f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$

$e) f(x) = sen 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

36) Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = e^x - 2x$ em [0, 1].

37) Represente graficamente as equações ao lado seguindo os passos do procedimento para construção de gráficos. Inclua as coordenadas de quaisquer pontos extremos e absolutos locais e pontos de inflexão.

$a) y = x^3 - 3x + 3$

$b) y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

$c) y = (x-2)^3 + 1$

$d) y = x + senx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$e) y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

38) Esboce o gráfico da função duas vezes derivável y = f(x) com as seguintes propriedades. Quando possível, identifique as coordenadas.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

39) Suponhamos que a derivada da função y = f(x) seja $y' = (x-1)^2(x-2)$
Em que pontos, se houver, o gráfico de f apresenta um mínimo local, um ,máximo local, ou um ponto de inflexão?

40) Suponhamos que a segunda derivada da função y = f(x) seja $y'' = x^2(x-2)^3(x+3)$.
Para que valores de x o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão?